

## Berechnung der Luftbewegung in einem zwangsbelüfteten Raum

Peter V. NIELSEN

*In diesem Aufsatz wird eine Berechnungsmethode behandelt, die es ermöglicht, die Luftbewegung in einem belüfteten Raum zu bestimmen. Die Methode beruht auf der Lösung einer Anzahl Strömungsgleichungen – vier nichtlinearer partieller Differentialgleichungen – mittels einer numerischen Methode.<sup>1)</sup>*

*Ein Vergleich mit Meßergebnissen deutet darauf hin, daß die behandelte Berechnungsmethode sich gut dafür eignet, die Luftbewegung in einem belüfteten Raum zu untersuchen, wenn die Strömung stabil und zweidimensional ist.*

*Die Berechnungsmethode kann erweitert werden, so daß sie auch die notwendigen Angaben für die Beurteilung des thermischen Komforts im Raum liefert.*

In Bild 1 ist das Problem illustriert, es zeigt einen senkrechten Schnitt durch einen Raum. Die Luft wird durch einen Spalt an der Decke entlang eingeblasen und entwickelt sich zu einem Wandstrahl, der sich unter der Decke hinbewegt. Es ist einfach, in diesem Strahl die Vermischung sowie die Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung zu berechnen, und die Eintrittsgeschwindigkeit wird oft so bemessen, daß die Geschwindigkeit auf 20–25 cm/s gefallen ist, wenn der Strahl  $\frac{3}{4}$  in den Raum hineingelangt ist.

Im weiteren Verlauf des Strahls verschwinden die einfachen Zusammenhänge, die z. B. zwischen Geschwindigkeit und

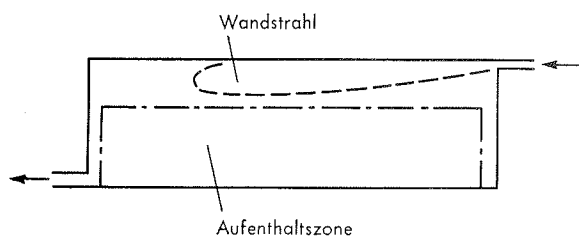


Bild 1. Senkrechter Schnitt durch einen belüfteten Raum. Es ist typisch, daß der Lufteintritt außerhalb der Aufenthaltszone erfolgt, mit dem Zweck, ein gleichmäßiges Geschwindigkeitsfeld in der Aufenthaltszone zu erzeugen.

Abstand von der Düse bestehen – man sagt, der Strahl löst sich auf –, und andere Parameter, wie z. B. die Abmessungen des Raums, bekommen entscheidenden Einfluß auf die Strömung. Wenn man also die Vermischung sowie die Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung unten in der Aufenthaltszone bestimmen will, ist es notwendig, alle diese Parameter zu berücksichtigen.

### Gleichungssystem

Das verwendete Gleichungssystem wurde auf der Grundlage der Navier-Stokes'schen Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung entwickelt. Das Gleichungssystem setzt eine stabile, zweidimensionale Strömung in dem betrachteten Schnitt durch den Raum voraus. Diese Forderung schließt die Verwendung von Einblas-Öffnungen nicht aus, die anfangs eine dreidimensionale Strömung erzeugen, vorausge-

<sup>1)</sup> Die Entwicklung erfolgte bei Prof. V. Korsgaard, Laboratorium für Wärmeisolierung, und bei Prof. F. Engelund, Institut für Strömungsmechanik und Wasserbau, Danmarks Tekniske Højskole, und wurde finanziert vom Staatlichen Technisch-Wissenschaftlichen Fond, Dänemark, und von der Danfoss-AG. Der Verfasser möchte den genannten Professoren sowie Forschungsleiter M. Dyre seinen Dank für die Förderung des Studiums aussprechen.

setzt, daß sich letztere ein Stück innen im Raum zu einem zweidimensionalen Frei- oder Wandstrahl entwickelt. Dies wird oft der Fall sein, wenn die Einblas-Öffnungen aus Sektionen bestehen, die in einer Linie dicht nebeneinander angebracht sind.

Die Beispiele, die am Ende zum Vergleich herangezogen werden, ergeben eine stabile, zweidimensionale Strömung. In tiefen Räumen mit großer Breite kann eine labile Strömung entstehen. In Zweifelsfällen sollte man deshalb diese Verhältnisse z. B. durch Modellversuche untersuchen, bevor man die Berechnungsmethode anwendet.

Bei den Geschwindigkeiten und Temperaturdifferenzen, um die es sich bei einer Klimatisierung handelt, ist die Luftströmung immer turbulent. Die *Navier-Stokes*'schen Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung beschreiben im Prinzip ein vollständiges Gleichungssystem. Dieses kann jedoch nicht zum Gegenstand einer numerischen Lösung gemacht werden, weil es die Turbulenz durch Schwankungen ausdrückt, die von einer Größenordnung bis herab auf 0,1 mm sein können, und deshalb bei einer numerischen Lösungsmethode eine unvorstellbar große Zahl von Differenzgleichungen erfordern würde.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \mu_{\text{eff}} \omega}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mu_{\text{eff}} \omega}{\partial x_2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) = -\omega \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_2} \right) + \\ + \mu_{\text{eff}} \left[ 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] &+ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right) + \\ + c_1 \mu_{\text{eff}} \left[ 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] &+ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \left] \frac{\varepsilon}{k} - c_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{wobei } \mu_{\text{eff}} = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5)$$

Bild 2. Vier Differentialgleichungen, die eine vollständige Beschreibung der zweidimensionalen, stabilen, turbulenten Strömung darstellen.

Statt dessen wird vorgezogen, die Turbulenz durch Mittelwerte der Strömung zu beschreiben, und sie durch eine *scheinbare Viskosität* auszudrücken. Dadurch ist es möglich, eine praktische Anzahl Differenzgleichungen zu erhalten, weil die Schwankungen der Mittelwerte der Turbulenz über einen bestimmten Abstand verhältnismäßig klein sind. Eine solche Beschreibung der Turbulenz erfordert ein Turbulenzmodell, d. h. ein Gleichungssystem, das den Zusammenhang zwischen gewissen Mittelwerten der Turbulenz ausdrückt. Das Turbulenzmodell, das hier verwendet wird, besteht aus einer Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie  $k$  und einer Gleichung für den Abfall – Dissipation – von turbulenter kinetischer Energie  $\varepsilon$ . Diese beiden Gleichungen sind die Gleichung (3) bzw. (4) in *Bild 2*. Gleichung (5) zeigt, wie die Turbulenz durch *scheinbare Viskosität* beschrieben wird.

Die Größen  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_\mu$  sind verschiedene universelle Konstanten. Die Herleitung der Gleichungen wurde von *Lauder* u. a. [1] näher beschrieben.

Die *Navier-Stokes*'schen Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung enthalten die Geschwindigkeiten in zwei rechtwinklig zueinander verlaufenden Richtungen  $v_1$  und  $v_2$  sowie den Druck  $p$  als Variable. Es wird vorgezogen, von diesen abzugehen, und statt dessen auf die etwas speziellen Variablen: Wirbelstärke  $\omega$  und Stromfunktion  $\psi$  überzugehen, weil es dann möglich ist, die Zahl der Differentialgleichungen zu verringern. Das bedeutet eine Einsparung an Rechenzeit und Speicherkapazität von ca. 20%.

Die Wirbelstärke ist die Differenz zwischen den Geschwindigkeitsgradienten in zwei rechtwinklig zueinander verlaufenden Richtungen. Sie ist das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit in dem betrachteten Punkt.

Die Stromfunktion beschreibt das Vektorfeld  $(v_1, v_2)$  durch einen einzigen Skalar  $\psi$ . Die Stromfunktion  $\psi$  ist eine praktische Variable bei der Beschreibung eines lüftungstechnischen Problems, weil Linien durch konstante  $\psi$ -Werte Stromlinien sind, d. h. Linien, die parallel zum Geschwindigkeitsvektor sind.

Die beiden Differentialgleichungen, die die *Navier-Stokes*'schen Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung beim vorerwähnten Wechsel der Variablen ersetzen, werden Wirbeltransportgleichung und Transportgleichung für die Stromfunktion genannt. Es sind die Gleichungen (1) und (2) in *Bild 2*.

Die vier Differentialgleichungen (1) bis (4) *Bild 2*, haben die vier Unbekannten  $\omega$ ,  $\psi$ ,  $k$  und  $\varepsilon$ . Sie repräsentieren deshalb eine vollständige Beschreibung der Strömung und bilden die Grundlage für die numerische Lösungsmethode.

In diesem Aufsatz handelt es sich um die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung bei isothermer Strömung. Die Ergebnisse gelten auch bei kleinen Temperaturdifferenzen, wo die erzwungene Konvektion über die freie Konvektion dominiert. Will man das Temperaturfeld bestimmen, sind die vier Differentialgleichungen um eine Gleichung, nämlich die Energiegleichung, zu erweitern.

Wenn die freie Konvektion beträchtlich ist, darf man die Erzeugung von Wirbelstärke durch den Dichtegradienten nicht vernachlässigen, und in die Wirbeltransportgleichung in *Bild 2* ist ein Glied hierfür einzuführen.

### Numerische Methode

Das Prinzip der numerischen Methode besteht darin, die Differentialgleichungen durch eine Anzahl von Differenzgleichungen zu ersetzen, die mittels eines geeigneten systematischen Verfahrens gelöst werden können.

Der betrachtete Plan wird in eine Anzahl Punkte aufgeteilt. Diese Punkte werden so verteilt, daß es zulässig ist,  $\omega$ ,  $\psi$ ,  $k$  und  $\varepsilon$  innerhalb des quadratischen Bezirks, der um die einzelnen Punkte liegt, als konstant zu betrachten. In Bereichen in denen die Gradienten der einzelnen Größen groß sind, liegen die Punkte somit relativ dicht, und in Bereichen, in denen die Gradienten klein sind, herrscht größerer Abstand zwischen den Punkten.

Die vier Differentialgleichungen werden in jedem Punkt durch vier Differenzgleichungen ersetzt. Wenn eine Punktzahl von  $21 \times 21$  verwendet wird, erhält man also ein Gleichungssystem, das aus  $21 \times 21 \times 4 = 1764$  Gleichungen mit 1764 Unbekannten besteht. Dieses Gleichungssystem wird jetzt auf einer EDV-Anlage mittels einer iterativen Methode gelöst. Aufgrund der hohen Anzahl Gleichungen ist eine Anlage der Größe ca. 100 K Bytes erforderlich. Die in diesem Artikel behandelten Beispiele sind auf einer IBM-Anlage System 370/145 berechnet worden.

Die Herleitung der Differenzgleichungen und der Aufbau der iterativen Methode ist von Gosman u. a. [2] detailliert beschrieben worden. Ein Teil des verwendeten EDV-Programms ist am Imperial College, London, entwickelt worden und ist ebenfalls in [2] beschrieben.

**Ergebnisse**

Im folgenden wird ein Vergleich mit Meßergebnissen angestellt, die in einem Versuchsraum von Norges Tekniske Høgskole in Trondheim [3] erzielt worden sind. Der Raum ist 8,3 m lang, 3,4 m breit und 2,8 m hoch. Der Lufteintrittsspalt ist an der einen Stirnwand unter der Decke angebracht. Er erstreckt sich über die ganze Breite der Wand und hat eine Öffnung von 15 mm. In den unteren Ecken der gegenüberliegenden Wand sind zwei Austrittsspalte angebracht. Die Luftgeschwindigkeit wird mittels Kugel-Anemometern gemessen, und die Strömungsrichtungen werden untersucht, indem man Rauch mit der Einblasluft in den Raum eintreten läßt.

Bild 3 zeigt die berechnete und gemessene Geschwindigkeitsverteilung im Raum. Die Geschwindigkeit ist mittels Linien durch Punkte mit derselben Geschwindigkeit angegeben, sowohl das gemessene als auch das berechnete Geschwindigkeitsfeld sind auf Bild 3 im Verhältnis zur Eintrittsgeschwindigkeit dimensionslos dargestellt.

Die eingetretene Luft bildet einen Wandstrahl, der sich unter der Decke hinbewegt. Im weiteren Verlauf an der linken Wand hinab läßt die Geschwindigkeit in den Ecken stark nach und wird niedriger als in einem Wandstrahl entsprechender Länge. Unten in der Aufenthaltszone steigt die Geschwindigkeit auf 8% der Eintrittsgeschwindigkeit an und fällt danach wieder auf unter 2% im oberen und rechten Teil der Aufenthaltszone ab.

Die Berechnung und der Versuch sind bei einer Eintrittsgeschwindigkeit von 1,8 m/s vorgenommen worden. Die Geschwindigkeit unten in der Aufenthaltszone liegt deshalb zwischen 14 und 4 cm/s.

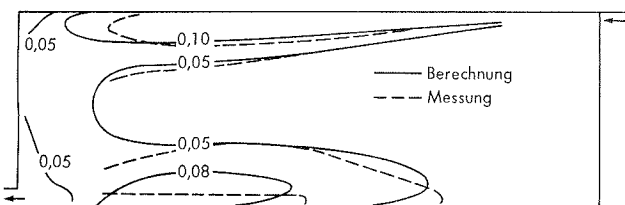


Bild 3. Berechnete und gemessene Geschwindigkeitsverteilung in einem Raum.

Es zeigt sich, daß die dimensionslose Geschwindigkeit in der Praxis bei größeren Variationen der jeweiligen Eintrittsgeschwindigkeit ziemlich unabhängig ist, weil die Struktur der Turbulenz in der rezirkulierenden Strömung ähnlich und damit unabhängig von der Reynolds'schen Zahl wird. Wenn die Eintrittsgeschwindigkeit z. B. auf 3,6 m/s erhöht wird, bekommt man unten in der Aufenthaltszone eine Geschwindigkeit, die zwischen 28 und 8 cm/s liegt. Man sieht, daß eine Verdoppelung der Eintrittsgeschwindigkeit sowohl eine Verdoppelung der Höchstgeschwindigkeit als auch eine Verdoppelung der Geschwindigkeitsdifferenz in der Aufenthaltszone bedeutet. Bei hohen Eintrittsgeschwindigkeiten ist es deshalb schwieriger, in der ganzen Aufenthaltszone einen einheitlichen thermischen Behaglichkeitszustand zu erzielen, als bei niedrigen.

Bild 4 zeigt die Verteilung der Stromlinien im Raum. Die Luftmenge, die zwischen zwei Stromlinien transportiert wird, ist konstant, und die Geschwindigkeit ist dort hoch, wo die Stromlinien dicht liegen, und niedrig, wo der Abstand zwischen ihnen groß ist. Die Stromfunktion ist im Verhältnis zur Eintrittsmenge dimensionslos. So wird z. B. zwischen den Stromlinien 4 und 6 das Doppelte der Eintrittsluftmenge transportiert, und insgesamt wird eine Luftmenge in Bewegung gesetzt, die ca. das Siebenfache der Eintrittsluftmenge beträgt.

Es muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Stromlinien nur Ausdruck für Mittelwerte sind. In einem betrachteten Punkt ist die Stromlinie parallel zur mittleren Geschwindigkeit, aber aufgrund der verschiedenen Richtungen der augenblicklichen Geschwindigkeiten erfolgt eine Bewegung von Luftmasse und Energie quer zur Stromlinie. Wenn Luft mit einer Übertemperatur eingeblasen wird, erfolgt also ein Wärmetransport quer zu den oberen Stromlinien in den Raum hinab.

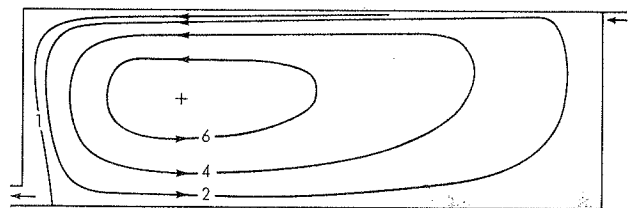


Bild 4. Berechnete Stromlinienverteilung in einem Raum.

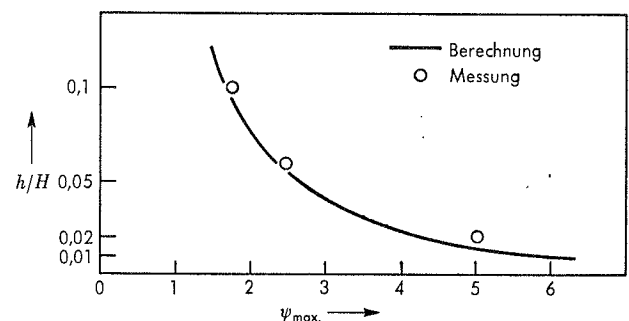


Bild 5. Umgewälzte Luftmenge in einem Raum als Funktion der Geometrie des Lufteintrittsspalts.

Die auf *Bild 5* angegebenen Meßergebnisse stammen von *Urbach* [4]. Es handelt sich um Versuche, die in einem Modell ausgeführt worden sind, das 2 m lang, 1 m breit und 1 m hoch ist. Der Lufteintrittsspalt ist an der einen Stirnwand unter der Decke angebracht und erstreckt sich über die ganze Breite des Modells. Die Spaltöffnung kann auf verschiedene Werte eingestellt werden. Die Absaugöffnung ist unten an der gegenüberliegenden Wand angebracht.

Wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht, ist der Höchstwert der Stromfunktion ein Ausdruck dafür, wie viel Luft in einem Raum im Verhältnis zu der Eintrittsmenge in Bewegung gesetzt wird. *Bild 5* zeigt, wie diese Größe mit abnehmender Spaltöffnung ansteigt. Die Eintrittsmenge ist in allen Situationen dieselbe, d. h. daß die Eintrittsgeschwindigkeit ebenfalls mit abnehmender Spaltöffnung ansteigt. Die Spaltöffnung  $h/H$  ist im Verhältnis zur Höhe des Modells dimensionslos angegeben.

Bei einer gegebenen Eintrittsluftmenge ist der Grad der Vermischung und die Menge der Luft, die im Raum in Bewegung gesetzt werden darf, begrenzt. Der Grund dafür ist der, daß die Eintrittsgeschwindigkeit mit abnehmender Spaltöffnung ansteigt und unten in der Aufenthaltszone einen Anstieg der Geschwindigkeit verursacht. Durch diese Geschwindigkeit sowie die Lärmerzeugung durch das Einblasen sind deshalb Grenzen dafür gesetzt, wie klein der Eintrittsspalt gemacht werden kann.

### Schlußbemerkungen

Ein Vergleich mit den Meßergebnissen deutet darauf hin, daß die behandelte Berechnungsmethode sich gut dafür eignet, die Luftbewegung in einem belüfteten Raum zu untersuchen, wenn die Strömung in den betrachteten Schnitten stabil und zweidimensional ist.

Die Berechnungsmethode kann erweitert werden, so daß sie auch die notwendigen Angaben für die Beurteilung des thermischen Komforts wie Luftgeschwindigkeit, Lufttemperatur, Oberflächentemperatur, Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten sowie Turbulenzintensität liefert.

Anschr. d. Verf.: *Enebærvej 6, DK 6430 Nordborg.*

### Literatur

- [1] *Lauder, B. E., und D. B. Spalding*: Mathematical Models of Turbulence. Academic Press, London, 1972.
- [2] *Gosman, A. D., W. M. Pun, A. K. Runchal, D. B. Spalding und M. Wolfshtein*: Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows. Academic Press, London, 1969.
- [3] *Hestad, T.*: Persönliche Mitteilung. Institutt for VVS, Trondheim – NTH, 1971.
- [4] *Urbach, D.*: Modelluntersuchungen zur Strahlüftung. Diss. TH Aachen, 1971.